INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Aula Teórica nº 14
LEM-2006/2007

Prof. responsável: Mário Pinheiro

Problema Fundamental da Electrostática
(condutores sob influência mútua)

No último problema mostrámos que os potenciais dos dois condutores estão relacionados com as cargas através das seguintes relações lineares:

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)q_1 + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R_3}(q_1 + q_2) \\ V_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R_3}(q_1 + q_2) \end{cases}$$

Podendo-se escrever na forma geral

$$V_k = \sum_{i=1}^{n} S_{ki} q_i$$

onde

$$\left\{ S_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \right.$$

e

$$\left\{ S_{12} = S_{21} = S_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3} \right.$$

Estes coeficientes, chamados de **coeficientes de potencial**, são independentes do estado de electrização dos condutores e só dependem da geometria dos mesmos e do meio que neste caso é o vácuo.

Existindo uma relação linear entre os V_k e os q_i, existe também a relação inversa
[1]

Sendo oc Cik chamados agora de **coeficientes de capacidade** e tal como os anteriores também são independentes do estado de electrização dos condutores.

O Problema Fundamental da Electrostática

Consiste em dadas as cargas qi de um conjunto de condutores, sob influência eléctrica mútua, determinar os seus potenciais V_k; ou então, dados os potenciais determinar as cargas.

[2]

Este problema tem sempre solução e esta é única. Aqui não foi provado de forma geral mas foi verificado através do exemplo anterior com os dois condutores esféricos. Em resumo, as cargas dos diferentes condutores estão relacionadas com os potenciais de todos e vice-versa, através de relações lineares do tipo
[3]

com os C_{ik} e S_{ki} independentes das cargas e dos potnciais.

<u>Condensador</u>

Chama-se condensador a um sistema de dois condutores em presença.
[4]

Repare bem que no caso de se verificar $V_1 > V_2 > 0$, a configuração de linhas de força é a assinalada na figura (sempre dirigida no sentido dos potenciais decrescentes pelo que as cargas nos condutores só podem ter os sinais indicados).

A carga no condutor (1) tem uma parte que trocas linhas de força com o condutor (2) e uma parte que troca linhas de força com o ∞. Podemos designar da forma seguintes essas contribuições:

$$q_1 = q_{12} + q_{1\infty} \; .$$

Define-se capacidade de um condensador, como o quociente entre a carga positiva que é trocada entre os dois condutores e a diferença de potencial entre eles:
[5]

É fácil de provar que a carga no condutor (2) que recebe as l. de f. que vêm de (1) têm de ser simétricas, $q_{21} = -q_{12}$.

Teorema dos Elementos Correspondentes

[6]

Considere-se dois condutores (1) e (2), com $V_1 > V_2$, e um tubo de l. de f. que parte de (1) e chega a (2). Seja agora uma superfície fechada constituída pela superfície lateral do tubo de l. de f. e por duas superfícies escavadas no interior dos dois condutores. Aplicando o Teorema de Gauss, tem-se

[7]

O primeiro e terceiro integrais são nulos, porque as superfícies são escavadas no interior dos condutores e aí o campo eléctrico é nulo. Por outro lado, o segundo integral é também nulo porque a normal à superfície do tubo de l. de f. é perpendicular ao campo. Tem-se assim que $\sum q_{\text{int}} = 0$ e dentro do tubo apenas existe q_{12} e q_{21}. Tem-se portanto , $q_{12} + q_{21} = 0$. A este resultado chama-se **Teorema dos Elementos Correspondentes.**

Voltemos agora de novo ao problema dos dois condutores esféricos a fim de determinarmos a capacidade do condensador.

[8]

Neste caso $q_1 = q_{12}$, visto que não há troca de l. de f. entre o condutor (1) e o ∞, $q_{1\infty}$. Por outro lado,

[9]

Como se verifica C é uma grandeza que só depende da geometria dos condutores e do meio entre os condutores (também chamados de armaduras do condensador) e é independente do estado de electrização.

Energia Electrostática de um sistema de condutores

Seja um sistema de n condutores em presença:
[10]

A energia electrostática pode ser calculada usando a expressão para distribuições em superfície (visto ser $\rho = 0$ num condutor em equilíbrio electrostático):
[11]

Esta expressão é formalmente idêntica à expressão encontrada para um sistema de cargas pontuais. Contudo, num sistema de cargas pontuais a energia intrínseca de cada carga não era contabilizada, apenas o era a energia de interacção.

Energia de um condensador

[12]

Seja um condensador constituído por um condutor com uma cavidade, com um outro no seu interior.
[13]

O primeiro termo representa a energia armazenada entre as armaduras do condensador (é aquilo que se chama vulgarmente <u>energia do condensador</u>).

O segundo termo representa a energia armazenada no espaço exterior (equivalente a um condensador carregado com q_1+q_2, estando a outra armadura no ∞).
[14]